受　験　番　号						氏　　　名

２０２１年度

放送大学大学院修士課程

文化科学研究科 文化科学専攻

自然環境科学プログラム

筆　記　試　験　問　題

試 験 日：２０２０年１０月３日（土）

試験時間：９時３０分～１１時３０分

注意事項

1．試験開始の合図があるまで、この試験問題冊子は開かないでください。

2．解答には、黒鉛筆かシャープペンシルを使用してください。

3．配付されるものは、「試験問題冊子１冊」、「解答用紙５枚」及び「下書き用紙５枚」です。追加配付はしません。

4．試験開始の合図の後、試験問題冊子を確認してください。**試験問題冊子は、表紙、白紙、問題（12ページ）**の順に綴じられています。試験問題冊子、解答用紙及び下書き用紙に落丁・過不足のある場合、あるいは印刷が不鮮明な場合には、手を挙げて試験監督員の指示に従ってください。

5．試験問題冊子の所定欄に、受験番号及び氏名を記入してください。

6．解答用紙は、「大問題（試験問題冊子に第１問、第２問…と表示されています。）」ごとに使用し、解答用紙の所定欄に、プログラム名、氏名、受験番号並びに「大問題」番号及び「大問題」ごとに何枚目であるかを、解答用紙別に必ず記入してください。

小問題及び選択問題を解答する際の番号等は、解答用紙のマス目の左側の「小問題番号等記入スペース」に記入してください。

なお、問題文中に別途記入方法の指示がある場合はそちらに従ってください。

7．解答用紙１枚につき、８００字まで記入することができます。解答用紙５枚のうち、**自然環境科学プログラムは５枚以内**で解答してください。指定された字数に従って解答してください。

8．試験問題冊子、解答用紙及び下書き用紙を綴じているホチキス針をはずしたり、中身を破り取ったりしてはいけません。

9．試験問題冊子、解答用紙及び下書き用紙は試験終了後に回収します。試験問題冊子及び下書き用紙に解答を記入しても採点の対象にはなりませんので、必ず解答用紙に解答を記入してください。

10．試験時間は２時間です。試験開始後４０分を経過した後は、試験問題冊子、解答用紙及び下書き用紙を試験監督員に提出した上で、退室してもかまいません。ただし、試験終了５分前以降は退室できません。

自然環境科学プログラム　筆記試験問題

以下の第１問から第６問までの問題のうち，出願時に提出した研究計画に最も近いと考えられる分野を一つだけ選び，その分野の問題にすべて解答しなさい。なお各問題の分野は，第１問は数理科学分野，第２問は天文学分野，第３問は物理分野，第４問は化学分野，第５問は生命・生態分野，第６問は地球科学分野である

なお解答にあたっては，下の注意事項をよく読み，その指示に従うこと。

注意事項

（１）　解答用紙には，受験番号記入欄の下に「第□問」と印刷されている。この□の中に、選択した問題の番号（１から６のいずれか）を，必ず記入すること。

（２）　解答する問題のなかにさらに複数の小問題がある場合には，どの小問題への解答であるかを，たとえば(2a)のように，小問題の記号を使って明示すること。

（３）　記述問題に解答の字数制限が明記されている場合は，その指示を守ること。

第１問（数理科学分野）

以下の問 (1)，(2) に答えよ。なお，解答は結果だけを述べるのではなく，途中の推論や計算過程も必ず述べること。解答は問 (1)，(2) ごとに解答用紙１枚（裏も使用可）に記入すること。

(1) k, n を非負の整数とする。関数 $f(x)$ の k 階導関数を $f^{(k)}(x)$ で表す。実数の範囲で，関数 $u_n(x) = (x^2-1)^n$ を考え，

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} u_n^{(n)}(x)$$

と定義する。このとき，以下の問 (1a)～(1d) に答えよ。

(1a) $P_1(x)$，$P_2(x)$ および $u_3^{(2)}(x)$ を求めよ。

(1b) $n \geq 1$ とする。このとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_1(x) P_n(x)\, dx$ を求めよ。

(1c) $n \geq 2$ とする。$k = 2, 3, 4, \ldots$ に対して，

$$(x^2-1)u_n^{(k)}(x) = 2(n-k+1)x\, u_n^{(k-1)}(x) + (2n-k+2)(k-1)u_n^{(k-2)}(x)$$

が成り立つことを証明せよ。

(1d) $n \geq 2$ とする。このとき，$P_n(x)$ は，２階線形微分方程式

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

を満たすことを証明せよ。

(2) 実数の集合 R 上の n 次数ベクトル空間 R^n について以下考える。行列 A やベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を, ${}^t\!A$ や ${}^t\boldsymbol{x}$ で表す。従って, ${}^t({}^t\!A) = A$ や ${}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A$ が成り立つ。n 次数ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i)$ と $\boldsymbol{y} = (y_i)$ との内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$$

で定義され, これは線型性を満たす。R^n の部分空間 W において,

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{y} \mid \text{すべての } \boldsymbol{x} \in W \text{ において } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}$$

とおく。このとき, R^n の要素 $\boldsymbol{x}$ において,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} \text{ となる } \boldsymbol{x_1} \in W,\ \boldsymbol{x_2} \in W^{\perp}$$

が１通りに存在する。そこで, $\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x_1}$ を対応させる写像を f とする。さて, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ において,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2},\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}, \text{ただし } \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1} \in W,\ \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2} \in W^{\perp}$$

とする。以上を前提にして, 以下の問 (2a)～(2d) に答えよ。

(2a) f は線型写像であることを証明せよ。

(2b) f を表す行列を A とする。このとき, $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ を証明せよ。

(2c) $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^t\!A\boldsymbol{y})$ を証明せよ。

(2d) $A = {}^t\!A$ を証明せよ。

以上

第２問（天文学分野）

以下の問(1)，(2)に答えよ。解答には問題番号(1a)～(2f)を明記すること。

(1)　ケプラーの法則とニュートンの万有引力の関係について，次の文章を読み，(1a) から(1e)の問いに答えよ。

ヨハネス・ケプラー(1571 - 1630)は太陽系の惑星の運動の観測データを解析し，ケプラーの法則と呼ばれる以下の三つの法則を導き出した。

- 第一法則 （楕円軌道の法則） 惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運動する。
- 第二法則 （面積速度一定の法則） 惑星と太陽が結ぶ線分が単位時間あたりに掃く面積は一定である。
- 第三法則 （調和の法則） 惑星の公転周期の二乗は軌道長半径の三乗に比例する。

ケプラーの法則は古典力学(ニュートン力学)の範疇で理解できる。ニュートンの万有引力では，“逆二乗の法則(inverse square law)”が成立している。これは，力の強さは力の源からの距離 r の二乗に反比例するという法則である。いま，質量 m と M の二つの物体が，距離 r だけ離れている場合，両物体に働く万有引力 F は

$$F = G\,m\,M\,r^{-2}$$

で与えられる。ここで，G は万有引力定数である。

いま，我々はニュートンの万有引力の法則を知らないとする。しかし，距離が遠くなると万有引力 F は弱くなることが予想されるので，とりあえず距離の依存性はわからないが，

$$F \propto r^{-n}$$

であると仮定しよう。こう仮定すると，少なくとも距離が遠くなると万有引力 F は弱くなるからである。

ここで，太陽系における，ある惑星の運動を考える。太陽とその惑星の質量を，それぞれ M と m とする。万有引力は物体の質量が大きいと強くなることが期待される。したがって，次の関係も仮定できる。

$$F \propto m$$
$$F \propto M$$

これら三つの比例関係をまとめると

$$F \propto mMr^{-n}$$

となる。ここで比例定数を G とすると，万有引力は

$$F = GmMr^{-n}$$

で表すことができる。G は万有引力定数に相当する。

(1a) 万有引力は遠心力と釣り合う。上で考えた惑星の公転運動の速度をv とする。万有引力と遠心力の釣り合いの式を記せ。

ここで，ケプラーの第三法則に立ち戻ろう。この法則によれば，惑星の公転周期 T の二乗は軌道長半径 r の三乗に比例するので

$$T^2 \propto r^3$$

となる。両辺の平方根を取って，比例定数を k とすると

$$T = kr^{3/2} \qquad ①$$

を得る。

(1b) 公転周期 T を r と v を用いて表せ。

(1c) (1b)で得られた式と，①を用いて，r と v の関係を導け。

(1d) (1a)と(1c)で得た二つの関係式を用いて，半径 r が定数であることを示せ。

(1e) (1d)で得られた関係式で，すべての r が定数になるときの n の値を求めよ。

以上のことから，ニュートンの万有引力の法則はケプラーの第三法則を説明することが理解できる。

(2)　太陽などの恒星のエネルギー源について，(2a)から(2f)の問いに答えよ。

(2a)　質量 M，半径 R の星（球体としてよい）の重力エネルギー E_G を表せ。その際，万有引力定数を G としてよい。

(2b)　太陽の光度を L としたとき，太陽のエネルギーを太陽の重力エネルギーで担うとした場合，太陽の寿命 τ はどのように表されるか記せ。

(2c)　太陽は半径 $R = 7\times10^{8}$ m，質量 $M = 2\times10^{30}$ kg の恒星である。万有引力定数 $G = 7\times10^{-11}$ m^3 kg^{-1}s^{-2}として太陽の寿命 τ(年)を求めよ。太陽の光度は $L = 4\times10^{26}$ W である。
ただし，τ の評価はオーダーだけでよい(10^x 年として，x を求めよ)。
なお，1 年 $= 3\times10^{7}$ 秒としてよい。

(2d)　(2c)で求めた太陽の寿命について議論せよ。

(2e)　太陽などの恒星のエネルギー源は恒星の内部で発生する熱核融合であることが知られている。水素原子核（陽子）をヘリウム原子核に熱核融合してエネルギーを取り出している。4個の陽子から1個のヘリウム原子核を生成するが，その際，Δm の質量が減少する。これを質量欠損と呼ぶ。この質量欠損で発生するエネルギーはアインシュタインの特殊相対論から$\Delta E = \Delta m c^2$ である。ここで c は光速である。陽子の質量をm_p とすると，質量欠損のため，$\Delta m / (4m_p) = 0.7\%$ の効率でエネルギーを取り出せる。太陽の質量をMとする。太陽内部のコアと呼ばれる領域にある陽子が熱核融合に利用可能であり，コアの質量は太陽の質量の1/10である。太陽がこの熱核融合で光度を維持する場合，寿命 τ はどのようにして計算できるか記せ。

(2f)　太陽の質量として，$M = 2\times10^{30}$ kg を用いて，太陽の寿命を評価せよ。ここでも，τ の評価はオーダーだけでよい(10^x 年として，x を求めよ)。現在の太陽の年齢と矛盾がないことが確認できたであろう。

以上

第３問（物理分野）

以下の問 (1)〜(4) のすべてに答えよ。

(1) ばね定数 k のばねの一端を手に持ち，他端に質量 m の物体をとりつけて鉛直に垂らす。物体は，容器に入った水中に入れる。手元を鉛直軸に沿って一定の振幅で上下に単振動させる。単振動の角振動数は ω とする。このとき物体が水中で行う運動について以下の問 (1a) から (1d) に答えよ。ただし物体は水から抵抗力を受ける。抵抗力は物体の速度に比例し，比例係数の大きさは b である。物体の大きさは無視できるものとする。重力加速度の大きさは g とせよ。

(1a) 適切な座標軸を設定し，物体の運動方程式を書け。問題文に与えられていない物理量が必要な場合は，定義したうえで用いること。

(1b) 共鳴が起きる条件を式で表せ。以下の問 (1c) と (1d) では，この条件が満たされているものとする。

(1c) 横軸に時間，縦軸にばねの変位をとり，変位の時間変化を表すグラフを描け。定性的な概略を示せばよい。

(1d) 十分な時間が経過した状態で「物体の力学的エネルギー」,「手のする仕事」,「水からの抵抗力によって散逸するエネルギー」がどのような関係を満たすか説明せよ。

(2) 半径 a の長い中空ソレノイドコイルがある。単位長さ当たりの巻き数は n である。このコイルに振動電流 $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ を流す。i_0 は電流の振幅，ω は角振動数，t は時刻である。コイルの長さは半径に比べて十分長く，内部には一様な磁場ができる。 コイル内部を満たす空気の透磁率は μ_0 として，以下の問 (2a), (2b) に答えよ。向きについては，図で概略を示してもよい。問題文に与えられていない物理量が必要な場合は，定義したうえで用いること。

(2a) コイルの内側と外側の磁場を求めよ。

(2b) 電磁誘導によってコイルの内側と外側に生じる電場を求めよ。

(3) 1 気圧のもとで，25 °C の水 200 g に，ある量の 0 °C の氷を入れてしばらく放置したところ，氷が解け 5 °C で平衡状態となった。以下の問 (3a) から (3d) に答えよ。 数値は有効数字 2 桁で答えよ。ただし，この水と氷の入った容器は断熱壁で囲まれ熱の出入りはないものとする。 1 気圧のもとで，氷の融解熱は 80 cal/g，水の定圧比熱は 1 cal/(g · K) として計算せよ。必要であれば熱の仕事当量を 1 cal = 4.2 J とせよ。また，$\log(278/273) = 0.0181$ を用いてよい。log は自然対数である。

(3a) 解けた氷の量（グラム数）を求めよ。

(3b) この過程で氷と水がはじめに持っていたエントロピーは，それぞれ増えるか減るか。また，氷と水のエントロピーの和は増えるか減るか。理由をつけて答えよ。

(3c) 一般に，0 °C の氷 100 g がすべて解けて水になるときに放出されるエントロピーを求めよ。

(3d) この過程で最終的に得られた 5 °C の水を全て氷にするには最低どれだけの仕事が必要か答えよ。 その計算の根拠も説明せよ。ただし，余分な熱量は 25 °C の外界に放出されるものとする。

(4) ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

で記述される量子力学的な 1 次元調和振動子について，以下の問 (4a) から (4c) に答えよ。m は振動子の質量，ω は固有振動数である。また，$\hat{x}$ と $\hat{p}$ はそれぞれ位置座標と運動量の演算子である。 プランク定数を 2π で割った値を $\hbar$ とする。

(4a) $\hat{x}$ と $\hat{p}$ の間に成り立つ交換関係を示し，不確定性関係（不確定性原理）との関係を述べよ。

(4b) 古典論と違い，量子力学的な 1 次元調和振動子の基底状態のエネルギーは有限の値を持つ。その理由を不確定性関係と関連付けて説明せよ。

(4c) 基底状態の波動関数はどのような形になるか。概形を示せ。

以上

第４問（化学分野）

以下の問(1)～(4)に答えよ。

(1)　以下の文章の（ア）～（オ）にふさわしい語句を答えよ。

一般に原子は，原子核と電子からなる。さらに原子核は（ア）と（イ）からなり，これらは核子と呼ばれる。（ア）は$+e$，電子は$-e$の電荷を持つ。eは素電荷である。（ウ）とは（ア）の数であり，電気的に中性な原子では電子の数と等しい。核子の数，すなわち（ア）の数と（イ）の数の総計を（エ）という。（ウ）が等しく（エ）の異なる核種を，互いに（オ）の関係にあるという。

(2)　エタノールとジメチルエーテルの分子式はともに C_2H_6O である。以下の問(2a)～(2c)に答えよ。

(2a) エタノールとジメチルエーテルの構造式をそれぞれ記せ。
(2b) エタノールとジメチルエーテルの持つ官能基名をそれぞれ答えよ。
(2c) エタノールとジメチルエーテルでは，どちらの沸点が高いか，理由とともに答えよ。

(3)　タンパク質の階層的な構造について，以下の 10 個の語句をすべて用いて説明せよ。解答では，これらの語句に下線を引くこと。

ペプチド結合，高分子，1 次構造，2 次構造，3 次構造，4 次構造，疎水性，αヘリックス，βシート，分子間力

(4)　二つの水素原子 H_A と H_B の規格化された 1s 軌道をそれぞれχ_A, χ_Bとする。χ_A, χ_Bはともに実数の関数である。分子軌道法では，水素分子（H_2）の分子軌道はχ_Aとχ_Bの重ね合わせ

$$\phi_+ = \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}}(\chi_A + \chi_B), \qquad \phi_- = \frac{1}{\sqrt{2(1-S)}}(\chi_A - \chi_B)$$

で近似される。Sは重なり積分で，$S = \int \chi_A \chi_B \, d\tau = \int \chi_B \chi_A \, d\tau$である。 τは電子の座標を表し，$0 \leq S \leq 1$である。以下の問(4a)～(4d)に答えよ。

(4a) ϕ_+やϕ_-のように，分子軌道を原子軌道の線形結合で表す近似を何と呼ぶか，答えよ。

(4b) ϕ_+とϕ_-はどちらが結合性軌道で，どちらが反結合性軌道か，図を描いて，理由とともに答えよ。

(4c) ϕ_+が規格化されていることを示せ。

(4d) H_2はできるが，He_2はできない。その理由を，分子軌道と電子配置を用いて説明せよ。

以上

第５問（生命・生態分野）

以下の問(1)，(2)に答えよ。解答には問題番号(1a)～(2d)を明記すること。

(1)　細菌は制限酵素を用いてバクテリオファージによる感染を防ぐことができる。このことに関連する以下の問(1a)～(1f)に答えよ。

(1a)　酵素とはどのような物質で，どのような機能や性質をもったものか，説明せよ。

(1b)　バクテリオファージはどのようなもので，どのように細菌に感染し，自身を複製するか，説明せよ。

(1c)　制限酵素はどのような酵素で，どのようにバクテリオファージの感染を防ぐのか，説明せよ。

(1d)　制限酵素はバクテリオファージによる感染を防御する。一方，細菌は制限酵素から自身を守る仕組みももっている。どのようなしくみで細菌自身は制限酵素から守られているか，メチル化という言葉を用いて説明せよ。

(1e)　制限酵素は分子生物学的な実験で広く利用されている。このことを具体的な例を示して，説明せよ。

(1f)　脊椎動物に広く見られる生体防御に関わる分子として，免疫グロブリン(抗体)がある。免疫グロブリンはどのような分子で，どのようにして生体防御に関与しているか，説明せよ。

(2) 以下の問(2a)～(2d)に答えよ。

(2a) 市街地に生息する動物の例を一種挙げ，その種のどのような性質が市街地での生息を容易にしていると考えられるか，説明せよ。

(2b) 日本の里山は生物多様性の高い地域として知られている。なぜ，里山では生物多様性が高く維持されてきたのか，考えられる理由を説明せよ。

(2c) 住宅地に周囲を囲まれた中に位置する公園で植栽管理の頻度を下げると，人の立ち入りが少ない場所を中心に植物の芽生えが観察されるようになる。このような状況の下で芽生えが観察されやすい木本植物にはエノキ，ムクノキ，トウネズミモチなどがあるが，これらの木本植物にはある共通の特徴がある。それは何か。また，その特徴は，住宅地の中の公園での発芽にどう結びついているのか。それぞれ説明せよ。

(2d) 落葉広葉樹を優占種とする二次林は，伝統的な管理の下では低木層や草本層の植被率が低い状態で維持される。さらに，十数年から数十年の周期で伐採され萌芽更新する。こうした管理が，そこに生息する動物の種組成にどのように影響し得るか。考えるところを述べよ。

以上

第６問（地球科学分野）

以下の問(1)～(10)のすべてに，それぞれ150字程度で答えよ。解答には(1)～(10)の問題番号を明記すること。

(1)　天体の平均密度に注目して，太陽系の惑星を分類せよ。

(2)　炭素質コンドライトと太陽系の平均元素存在度の関係について説明せよ。

(3)　地球内部（地表面から地球中心まで）の構成物質の分布を説明せよ。

(4)　沈み込み帯を経由した物質循環で H_2O が地表からマントルに移動するしくみについて説明せよ。

(5)　部分融解とはどのような現象か説明せよ。また部分融解と花こう岩マグマ生成の関係を説明せよ。

(6)　100 万年程度の時間スケールで，大気中の二酸化炭素を固体地球に固定する過程について説明せよ。

(7)　地球を巡る大気大循環の原動力について説明せよ。

(8)　地球を巡る海洋大循環について説明せよ。

(9)　収束境界，発散境界，およびホットスポットの，それぞれの場所における地震の特徴を説明せよ。

(10)　地球の歴史において数千万年から数億年の間隔で繰り返し発生した現象を２つ挙げ，その概略を説明せよ。

以上